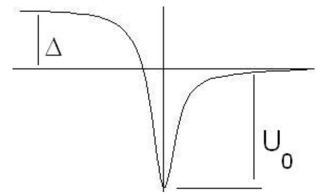
Мемориальная олимпиада по теоретической физике
«100 лет Л.Д. Ландау»

1. Частица массы M, летящая со скоростью V, близкой к скорости света, $c - V \ll c$, распадается на две частицы с одинаковыми массами m, причем выполняется условие $M - 2m \ll M$. Найти средний квадрат угла разлета $\langle \Theta^2 \rangle$ распадных частиц в лабораторной системе отсчета.

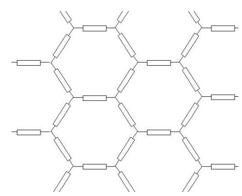
2. Найти критерий существования связанного состояния в одномерной асимметричной потенциальной яме $U(x)$ глубины U_0 и ширины a, удовлетворяющей условиям $U(x \to +\infty) = 0$ и $U(x \to -\infty) = \Delta$, если $mU_0a^2 \ll \hbar^2$, где m - масса частицы.



3. Одномерная модель Изинга определяется гамильтонианом $H = -J\sum_{j=1}^{N} \sigma_j \sigma_{j+1}$, в котором переменные σ_j принимают значения ± 1. Найти зависимость средней плотности числа доменных «стенок» от температуры в термодинамическом пределе $N \to \infty$.

4. Два нейтрона, взаимодействующие по закону $J\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ $(J < 0)$, где $\mathbf{s}$ — оператор спина нейтрона, помещены в одномерную потенциальную яму $U(x)$ ширины a с непроницаемыми стенками. Определить температурную зависимость спиновой восприимчивости такой системы при низких температурах $T \ll |J|, \hbar^2/(ma^2)$.

5. Одинаковые резисторы с сопротивлением R соединены в бесконечную двумерную шестиугольную сетку («соты»). Найти сопротивление между противоположными вершинами шестиугольника в такой сетке.



6. Безмассовые ферми-частицы описываются кинетической энергией $H_{\mathrm{K}} = c\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\mathbf{p}}$, в которой оператор $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = 2\hat{\mathbf{s}}$ соответствует спину 1/2. Найти зависимость сечения рассеяния этих частиц мишенью с потенциалом $U(r) = (\alpha/r)e^{-r/a}$ как функцию энергии. Предполагается, что $\alpha \ll \hbar c$.

7. Найти критерий образования связанного состояния и величину энергии связи в одномерной мелкой потенциальной яме $U(x)$, удовлетворяющей условиям $U(-x) = U(x)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} U(x)dx = 0$.

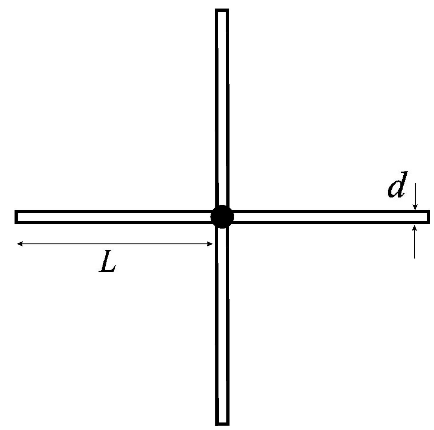
8. На поверхности стола (плоскость xy) имеется аксиально-симметричный бугор с профилем $z(x,y) = ha^2(a^2 + x^2 + y^2)^{-1}$, $h \ll a$. На него налетает шар с радиусом $R \ll a$, первоначально катившийся по прямой $y = y_0$ со скоростью V.

   (а) При какой скорости V шар оторвется от стола?

   (б) Предположим, что скорость V еще недостаточна для отрыва, но уже настолько велика, что отклонение шара от первоначальной траектории мало. На какой угол отклонится от оси x направление движения шара после рассеяния?

   Решите задачу для двух случаев: абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой поверхности.

9. Электрон с массой m может двигаться по плоскости внутри тонкого креста (см. рисунок), составленного из четырех полосок длиной L и шириной $d \ll L$. Область «перекрестка» (размером $\sim d$) представляет собой довольно высокий потенциальный барьер, так что вероятность прямого (без отражения или поворота на 90 градусов) прохождения для электрона, подлетающего к перекрестку в низшем состоянии поперечного квантования и с малым продольным импульсом ($\ll d^{-1}$), равна $T \ll 1$. Потенциал барьера симметричен относительно поворотов на углы, кратные $\pi/2$.



Классифицируйте низколежащие уровни для электрона и определите соответствующие энергии.

10. Как известно, стационарные состояния квантовой частицы, находящейся в кубическом ящике с непроницаемыми стенками, характеризуются тремя натуральными числами n_x, n_y, n_z (каждое из них может принимать значения $1, 2, 3, \ldots$), так что энергии $E_{n_x n_y n_z} \propto (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$. В частности, основное состояние ψ_{111} – не вырождено, а первое возбужденное – трехкратно вырождено: $E_{211} = E_{121} = E_{112}$. Пусть частица помещена в состояние $\psi = \phi_x \psi_{211} + \phi_y \psi_{121} + \phi_z \psi_{112}$. После этого ящик адиабатически медленно поворачивают на угол 2π вокруг некоторой оси $\vec{n}$, так что в результате он оказывается снова в исходном положении. В каком состоянии ψ' окажется частица в конце этого процесса?

11. Гамильнониан бесконечной цепочки локализованных спинов имеет вид

$$H = \sum_i \left[J_x s_i^x s_{i+1}^x + J_y s_i^y s_{i+1}^y + h s_i^z \right]$$

где $s_i^{x,y,z}$ — компоненты спина $\frac{1}{2}$ расположенного в i-том узле линейной цепочки. Считать что анизотропия $\gamma = |J_x - J_y|/J \ll 1$, (где $J = (J_x + J_y)/2$) и поле $h \ll J$. Найти намагниченность цепочки (в расчете на один узел) при температурах $T \ll J$.

12. В вязкой жидкости движется шар с плотностью больше плотности жидкости. Найти, на сколько сместится пробная частица (частица пренебрежимо малых размеров) в горизонтальном направлении за время, пока шар движется с большой высоты до плоскости, в которой находится пробная частица. Считать, что расстояние от пробной частицы до траектории шара много больше его радиуса R.

13. Молекула тубулина представляет собой линейную полимерную цепь, к которой легко присоединяются мономеры (из раствора), и которая может рваться по одной из связей между мономерами. Оценить среднее число мономеров в молекуле тубулина, если заданы темп присоединения к молекуле мономеров r (число мономеров в единицу времени) и темп возникновения разрыва q (мы предполагаем $r \gg q$), который определяет число разрывов, возникающих за единицу времени в расчете на одну связь. (Считать, что вероятность разрыва связи не зависит от ее положения.) Оценить вероятность найти молекулу тубулина с длиной много больше средней.

14. В замкнутом сосуде содержится пересыщенный пар с концентрацией n_1 (других газов в сосуде нет). Найти закон, по которому растет со временем размер капли жидкости, взвешенной в паре, считая, что около поверхности капли концентрация пара равна своему равновесному значению n_0, $n_0 < n_1$.